



TITLE:

# bi-differential calculusと非線形可積分方程式 (非線形波動現象の研究の新たな進展)

AUTHOR(S):

戸田, 晃一

---

CITATION:

戸田, 晃一. bi-differential calculusと非線形可積分方程式 (非線形波動現象の研究の新たな進展). 数理解析研究所講究録 2012, 1800: 94-106

ISSUE DATE:

2012-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/173025>

RIGHT:

## bi-differential calculus\* と 非線形可積分方程式

富山県立大学 工学部

戸田 晃一 (Kouichi TODA)<sup>† ‡</sup>  
Faculty of Engineering,  
Toyama Prefectural University

### 概 要

双微分代数がもつ代数構造と非線形可積分系の数理に非常に深い関係があることが分かってきた。今回はその一端について報告する。

## 1 双微分代数

$\mathbb{C}$  上の結合多元環  $\Omega$  が,  $\mathcal{A} := \Omega^0$  と  $\mathcal{A}$ -双加群により直和分解 :

$$\Omega = \bigoplus_{m \geq 0} \Omega^m$$

され, 更に, 任意の自然数  $m, n$  に対して,

$$\Omega^m \Omega^n \subseteq \Omega^{m+n}$$

を満たすとき,  $\Omega$  を次数つき多元環 (*graded algebra*) という。

次に, 外微分形式がもつ代数構造を拡張した代数の説明に移る。そのために, 外微分形式を次のように整理し, それを, 次数付き微分代数 (*differential graded algebra*) と名付ける。微分  $d$  は,

$$d: \Omega^m \rightarrow \Omega^{m+1}$$

とする線形写像である。次の性質:

性質 1 分配性:

$$d(\varrho + \varsigma) = d\varrho + d\varsigma \tag{1}$$

---

\*本文中では, 双微分代数とよぶことにする。

<sup>†</sup>kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp

<sup>‡</sup>慶應義塾大学 自然科学教育研究センター

性質 2 次数付き Leibniz 則 :  $r = \deg(\varrho)^1$  のとき,

$$d(\varrho\varsigma) = (d\varrho)\varsigma + (-1)^r \varrho d\varsigma \quad (2)$$

性質 3 恒等式 :

$$d^2 = 0 \quad (3)$$

をもつ演算子として定義される.

次に, 次数付き双微分代数 (*bi-differential graded algebra*) を定義する [1, 2, 3, 4, 5]. 双微分  $d, \bar{d}$  は,

$$\begin{aligned} d: \Omega^m &\rightarrow \Omega^{m+1}, \\ \bar{d}: \Omega^n &\rightarrow \Omega^{n+1} \end{aligned}$$

とする線形写像であり, 次の性質 :

性質 4 分配性 :

$$\begin{aligned} d(\varrho + \varsigma) &= d\varrho + d\varsigma, \\ \bar{d}(\varrho + \varsigma) &= \bar{d}\varrho + \bar{d}\varsigma \end{aligned} \quad (4)$$

性質 5 次数付き Leibniz 則 :  $r = \deg(\varrho)$  のとき,

$$\begin{aligned} d(\varrho\varsigma) &= (d\varrho)\varsigma + (-1)^r \varrho d\varsigma, \\ \bar{d}(\varrho\varsigma) &= (\bar{d}\varrho)\varsigma + (-1)^r \varrho \bar{d}\varsigma \end{aligned} \quad (5)$$

性質 6 恒等式 :

$$d^2 = 0, \quad \bar{d}^2 = 0, \quad d\bar{d} + \bar{d}d = 0 \quad (6)$$

をもつ演算子として定義される.

また,  $z$  を任意のパラメータとして

$$d_z := \bar{d} - zd \quad (7)$$

を導入すると,

$$d_z^2 = (\bar{d} - zd)(\bar{d} - zd) = \bar{d}^2 - z(d\bar{d} + \bar{d}d) + z^2 d^2$$

となり, 任意の  $z$  に対して  $d_z^2 = 0$  という条件を課すことで, 可積分条件 (6) を再現できる.

次に, 双微分  $d, \bar{d}$  が満たす次数付き双微分代数を用いた非線形可積分方程式の構成手法について紹介する.

---

<sup>1</sup> $r$  は  $\varrho$  の次数. 微分形式ならば,  $\varrho$  は  $r$ -形式である, ということ.

## 2 双微分代数による非線形可積分方程式の構成手法

次数 1 である  $A$  ( $\deg(A) = 1$ ) を用いて, 微分  $\bar{d}$  の代わりとなる新たな演算子  $\bar{D}$  を次のように定義する<sup>2</sup>:

$$\bar{D} := \bar{d} - A. \quad (8)$$

このとき,  $d^2 = 0$  に加えて,

$$\bar{D}^2 = 0, \quad d\bar{D} + \bar{D}d = 0 \quad (9)$$

を満たすとき, 演算子  $\bar{D}$  と  $d$  の組が双微分代数をなす. 条件 (9) の第一式:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{D}^2 \\ &= (\bar{d} - A)(\bar{d} - A) \\ &= \bar{d}^2 - \bar{d} \circ A - A\bar{d} + A^2 \\ &= \bar{d}^2 - \bar{d}A + A^2 \end{aligned}$$

より

$$\bar{d}A - A^2 = 0 \quad (10)$$

を, 第二式:

$$\begin{aligned} 0 &= d\bar{D} + \bar{D}d \\ &= d(\bar{d} - A) + (\bar{d} - A)d \\ &= d\bar{d} - dA + \bar{d}d \end{aligned}$$

より

$$dA = 0 \quad (11)$$

を, それぞれえる. ここで,

方程式 (10) と (11) が通常可積分理論における零曲率条件の役割を演ずる

ことを強調しておきたい.

方程式 (10), (11) の両方をみたす次数 1 の  $A$  をみつけることは非常に難しい. しかし, どちらかを満たす  $A$  を求めることはさほど難しくはない. そこで, まず片方の方程式を満たす解をみつけて, それがもう片方の方程式を満たすとしたときにでてくる情報を求めることにする.

<sup>2</sup>これは明らかに共変微分の形をしている. このように新たな演算子を定義する手法を, *dressing* という.

- 【手順】 方程式 (11)  $\Rightarrow$  方程式 (10) の場合  
方程式 (11) は自明な解:  $\phi \in \mathcal{A}$

$$A = d\phi \quad (12)$$

をもつ. これを方程式 (10) に代入すると,  $\phi$  が満たすべき非線形方程式:

$$\bar{d}d\phi = (d\phi)^2 \quad (13)$$

をえる. ここで, 非線形方程式 (13) は  $\phi \mapsto \alpha\phi\alpha^{-1} + \beta (= \phi_{\alpha\beta})$  に対して不変であることを注意しておく. 但し,  $\alpha \in \mathcal{A}$  は正則 かつ  $d\alpha = \bar{d}\alpha = 0$ ,  $\beta \in \mathcal{A}$  は  $d\beta = 0^3$  である.

【証明】

$\phi_{\alpha\beta} = \alpha\phi\alpha^{-1} + \beta$  に対して,

$$\begin{aligned} d\phi_{\alpha\beta} &= d(\alpha\phi\alpha^{-1} + \beta) \\ &= (d\alpha)\phi\alpha^{-1} + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha d(\phi\alpha^{-1}) \\ &= \alpha(d\phi)\alpha^{-1} + (-1)^{\deg(\phi)}\alpha\phi d\alpha^{-1} \\ &= \alpha(d\phi)\alpha^{-1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \bar{d}d\phi_{\alpha\beta} - (d\phi_{\alpha\beta})^2 &= \bar{d}\{\alpha(d\phi)\alpha^{-1}\} - \{\alpha(d\phi)\alpha^{-1}\}\{\alpha(d\phi)\alpha^{-1}\} \\ &= \bar{d}\{\alpha(d\phi)\alpha^{-1}\} - \alpha(d\phi)^2\alpha^{-1} \\ &= (\bar{d}\alpha)(d\phi)\alpha^{-1} + (-1)^{\deg(\alpha)}\alpha\bar{d}\{(d\phi)\alpha^{-1}\} - \alpha(d\phi)^2\alpha^{-1} \\ &= \alpha(\bar{d}d\phi)\alpha^{-1} + (-1)^{\deg(d\phi)}\alpha(d\phi)\bar{d}\alpha^{-1} - \alpha(d\phi)^2\alpha^{-1} \\ &= \alpha\{\bar{d}d\phi - (d\phi)^2\}\alpha^{-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, 確かに非線形方程式 (13) は,  $\phi \mapsto \alpha\phi\alpha^{-1} + \beta$  に対して不変である.

(注 意)  $d\alpha = 0$  であれば,  $d\alpha^{-1} = -\alpha^{-1}(d\alpha)\alpha^{-1} = 0$  となる. 同様にして,  
 $\bar{d}\alpha = 0$  であれば,  $\bar{d}\alpha^{-1} = 0$  である.

- 【手順】 方程式 (10)  $\Rightarrow$  方程式 (11) の場合  
方程式 (10) を満たす解の一つとして,  $g \in \mathcal{A}$  に対して

$$A = (\bar{d}g)g^{-1} \quad (14)$$

---

<sup>3</sup>d-定数 いう. 一般に d-定数であっても,  $\bar{d}$ -定数, つまり今の場合であれば,  $\bar{d}\beta = 0$  とはならない.

がある。実際,

$$\begin{aligned}
 & \bar{d}A - A^2 \\
 &= \bar{d}\{(\bar{d}g)g^{-1}\} - \{(\bar{d}g)g^{-1}\} \wedge \{(\bar{d}g)g^{-1}\} \\
 &= (\bar{d}^2g)g^{-1} + (-1)^1(\bar{d}g) \wedge \{-g^{-1}(\bar{d}g)g^{-1}\} - (\bar{d}g)g^{-1} \wedge (\bar{d}g)g^{-1} \\
 &= (\bar{d}g)g^{-1} \wedge (\bar{d}g)g^{-1} - (\bar{d}g)g^{-1} \wedge (\bar{d}g)g^{-1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

このとき, 方程式 (11) に解 (14) を代入すると,  $g$  が満たすべき非線形方程式:

$$d\{(\bar{d}g)g^{-1}\} = 0 \quad (15)$$

をえる。ここで, 非線形方程式 (15) は  $\phi \mapsto \gamma\phi\delta (= \phi_{\gamma\delta})$  に対して不変である<sup>4</sup> ことを注意しておく。但し,  $\alpha \in \mathcal{A}$  は正則 かつ  $d$ -定数,  $\beta \in \mathcal{A}$  は正則 かつ  $\bar{d}$ -定数である。

ある事実についてコメントしておく:

$$\begin{aligned}
 & \text{方程式 (15) 左辺において, } d \leftrightarrow \bar{d}, g \leftrightarrow g^{-1} \text{ とした式} \\
 &= \bar{d}\{(dg^{-1})g\} \\
 &= \bar{d}\{[-g^{-1}(dg)g^{-1}]g\} \\
 &= -\bar{d}\{g^{-1}dg\} \\
 &= -\left[[-g^{-1}(\bar{d}g)g^{-1}]dg + (-1)^{\deg(g^{-1})}g^{-1}\bar{d}dg\right] \\
 &= g^{-1}(\bar{d}g)g^{-1}dg - g^{-1}\bar{d}dg \\
 &= g^{-1}(\bar{d}g)g^{-1}dg(g^{-1}g) + g^{-1}\bar{d}dg \\
 &= -g^{-1}(\bar{d}g)\{-g^{-1}(dg)g^{-1}\}g + g^{-1}\bar{d}dg(g^{-1}g) \\
 &= g^{-1}\left[-(\bar{d}g)(dg^{-1}) + (d\bar{d}g)g^{-1}\right]g \\
 &= g^{-1}\left[(-1)^{\deg(\bar{d}g)}(\bar{d}g)(dg^{-1}) + (d\bar{d}g)g^{-1}\right]g \\
 &= g^{-1}\left[d\{(\bar{d}g)g^{-1}\}\right]g^{-1}
 \end{aligned}$$

となり, もし  $g$  が非線形方程式 (15) の解であるならば,  $g^{-1}$  は非線形方程式

$$\bar{d}\{(dg^{-1})g\} = 0 \quad \text{または} \quad \bar{d}\{g^{-1}dg\} = 0$$

の解となる。

非線形方程式 (15) と (13) を結ぶ, 場の変換は, 解 (14) と (12) より,

$$(\bar{d}g)g^{-1} = d\phi \quad (= A) \quad (16)$$

<sup>4</sup>このとき,  $g$  はカイラル対称性をもつという。

で与えられる. この変換 (16) を **Miura 変換** とよぶことにする. このとき, 非線形方程式 (15) と (13) は, (見かけ上) 双対な関係 (*pseudoduality*) にある, という. このことは, 次のように言い換えることができる:

$(g, \phi)$  の組が非線形方程式 (Miura 変換):  $(\bar{d}g)g^{-1} - d\phi = 0$  の解であるとき,  $g$  は非線形方程式 (15) の,  $\phi$  は非線形方程式 (13) の, それぞれ解となっている

$$\begin{array}{ccc}
 A = (\bar{d}g)g^{-1} & \xrightarrow{\quad} & d((\bar{d}g)g^{-1}) = 0 \\
 \uparrow & \nearrow \text{ 'pseudoduality' } & \uparrow \\
 \bar{d}A - A A = 0 & & dA = 0 \\
 \downarrow & \nwarrow & \downarrow \\
 \bar{d}d\phi = d\phi d\phi & \xleftarrow{\quad} & A = d\phi
 \end{array}$$

新しい演算子  $D_z$  を次のように共変微分の形で定義する:

$$\begin{aligned}
 D_z &:= \bar{D} - zd \\
 &= \bar{d}_z - A.
 \end{aligned} \tag{17}$$

このとき,

$$D_z^2 = 0 \tag{18}$$

は可積分条件 (9) を与え, 非線形方程式 (13) は,  $d\bar{d} + \bar{d}d = 0$  および

$$d\{(d\phi)\phi\} = (d^2\phi)\phi + (-1)^1(d\phi)^2 = -(d\phi)^2$$

に注意すると,

$$0 = -\bar{d}d\phi + (d\phi)^2 = d[\bar{d}\phi - (d\phi)\phi]$$

と書くことができる. ある  $\varphi \in \mathcal{A}$  を導入すると, [ ] 内を

$$\bar{d}\phi - (d\phi)\phi = d\varphi \tag{19}$$

とかくことができる. この式の両辺に左から  $\bar{d}$  を演算させると,

$$\begin{aligned}
 &\bar{d}[\bar{d}\phi - (d\phi)\phi] = \bar{d}d\varphi \\
 \Leftrightarrow &(d\bar{d}\phi)\phi + (d\phi) \wedge (\bar{d}\phi) = -d\bar{d}\varphi \\
 \Leftrightarrow &d\{(d\phi)\phi + d\varphi\}\phi + (d\phi) \wedge \{(d\phi)\phi + d\varphi\} = -d\bar{d}\varphi \\
 \Leftrightarrow &\underbrace{\left\{ (d^2\phi)\phi + (-1)^1(d\phi)^2 + \underbrace{d^2\varphi}_0 \right\}}_0 \phi + (d\phi)^2\phi + (d\phi) \wedge (d\varphi) = -d\bar{d}\varphi \\
 \Leftrightarrow &-\underbrace{\left\{ (d^2\phi)\phi + (-1)^1(d\phi) \wedge (d\varphi) \right\}}_0 + d\bar{d}\varphi = 0 \\
 \Leftrightarrow &d\{-(d\phi)\varphi + \bar{d}\varphi\} = 0
 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\{ \quad \}$ 内を、再度、ある  $\psi \in \mathcal{A}$  を用いて、

$$\bar{d}\varphi - (d\phi)\varphi = d\psi \quad (20)$$

とかくことができる。また、この式の両辺に左から  $\bar{d}$  を演算させることで、同様の計算を続けることができる。

これまでの一連の計算は以下のように、条件 (18) を可積分条件としてもつ線形方程式：

$$D_z W(z) = 0 \quad (21)$$

にまとめることができる。ここで、

$$W(z) := I + \sum_{n \geq 1} W_n z^{-n} \quad (22)$$

である。そのことをみていく。

$$W(z) = I + \sum_{n \geq 1} W_n z^{-n} = I + W_1 z^{-1} + W_2 z^{-2} + \dots$$

より、

$$\begin{aligned} D_z W(z) &= (\bar{d} - A - zd)(I + W_1 z^{-1} + W_2 z^{-2} + \dots) \\ &= \dots \quad \text{計算 略} \\ &= -(dW_1 + A) + \sum_{n \geq 1} (\bar{d}W_n - AW_n - dW_{n+1}) z^{-n} \end{aligned}$$

なので、線形方程式 (21) が任意の  $z$  で成り立つためには、関係式：

$$A = -dW_1, \quad (23)$$

および  $n \geq 1$  に対して漸化式：

$$dW_{n+1} = \bar{d}W_n - AW_n = \bar{D}W_n \quad (24)$$

が成り立たなければならない。 $W_1 = -\phi$  とすると、関係式 (23) は、方程式 (11) の自明な解 (12) を再現できる。そして、 $n = 1$  のとき、漸化式 (24) は、

$$dW_2 = \bar{D}W_1 = -\bar{d}\phi + (d\phi)\phi \quad (25)$$

となる。よって、 $W_2 = -\varphi$  とすれば、 $n = 1$  のときの漸化式 (24) は、関係式 (19) をえる。同様に、 $n = 2$  のときの漸化式 (24) は、 $W_3 = -\psi$  とすることで、関係式 (20) をえる。これを繰り返すことで、同様の結果を帰納的にえることができる。



### 3 双微分代数による非線形可積分方程式に対する数理解析手法

非線形可積分系の構成だけではなく, Bäcklund 変換, Darboux 変換, Lax 対, 厳密解, 保存量を構成することも可能である [2, 4, 5].

#### 3.1 Bäcklund 変換

また, ここで新たな演算子:

$$D'_z := d_z - A', \quad \deg(A') = 1$$

を導入する. これが, 次の演算子  $G(z) = I + Fz^{-1}$  ( $\deg(F) = 0$ ) を用いて,

$$D'_z = G(z) \circ D_z \circ G(z)^{-1} \quad (26)$$

と与えられたとき, 変換 (26) は (elementary) Bäcklund (BT) 変換となっている. BT 変換 (26) は

$$dF = A - A', \quad (27)$$

$$\bar{d}F = A'F - FA \quad (28)$$

と等価である. (ここまでは一般論であり, これ以降は可積分系の問題に特化する.)

【証明】

(26) 式は

$$D'_z \circ G(z) = G(z) \circ D_z$$

なので, 左辺は,  $d \circ F = dF + (-1)^0 Fd = dF + Fd$  ( $\bar{d} \circ F$  についても同様) および  $d \circ I = dI + (-1)^0 Id = Id$  ( $\bar{d} \circ I$  についても同様) に注意すると,

$$\begin{aligned} D'_z \circ G(z) &= (d_z - A') \circ (I + Fz^{-1}) \\ &= -zId + (Id - A' - dF - Fd) + (\bar{d}F + F\bar{d} - A'F)z^{-1} \end{aligned}$$

となり, 右辺は

$$\begin{aligned} G(z) \circ D_z &= (I + Fz^{-1}) \circ (d_z - A) \\ &= -zId + (Id - A - Fd) + (F\bar{d} - FA)z^{-1} \end{aligned}$$

となる. よって, 両辺の  $z^0$  と  $z^{-1}$  の係数を比較すると,

$$z^0 : dF + A' = A \quad \implies (27) \text{ 式}$$

$$z^{-1} : \bar{d}F - A'F = -FA \quad \implies (28) \text{ 式}$$

をえる.

方程式 (11) の自明な解 (12) :

$$\begin{cases} A = d\phi, \\ A' = d\phi' \end{cases} \quad (29)$$

を BT 変換 (27) に代入すると, 一度積分 ( $d^{-1}$ ) でき

$$F = \phi - \phi' - C \quad (30)$$

をえる. ここで,  $dC = 0$  である<sup>5</sup>. そして, 自明な解 (29) と 等式 (30) を BT 変換 (28) に代入すると,

$$\bar{d}(\phi - \phi' - C) = (d\phi')(\phi - \phi' - C) - (\phi - \phi' - C)d\phi \quad (31)$$

をえる. これが  $\phi$  と  $\phi'$  (が満たす非線形方程式の間) を結ぶ BT 変換である.

他方で, 方程式 (10) の自明な解 (12) :

$$\begin{cases} A = (\bar{d}g)g^{-1}, \\ A' = (\bar{d}g')(g')^{-1} \end{cases} \quad (32)$$

を BT 変換 (28) に代入すると,

$$F = g'\mathcal{K}g^{-1} \quad (33)$$

をえる. ここで,  $\bar{d}\mathcal{K} = 0$  である<sup>6</sup>.

#### 【証明】

自明な解 (32) を, BT 変換 (28) に代入すると,

$$\begin{aligned} \bar{d}F &= A'F - FA = (\bar{d}g')(g')^{-1}F - F(\bar{d}g)g^{-1} \\ &\iff \bar{d}(Fg) = g'(g')^{-1}(\bar{d}g')(g')^{-1}Fg \\ &\iff (g')^{-1}\bar{d}(Fg) = (g')^{-1}(\bar{d}g')(g')^{-1}Fg \\ &\iff \bar{d}\{(g')^{-1}Fg\} = 0 \end{aligned}$$

となり, 一度積分 ( $\bar{d}^{-1}$ ) でき,

$$(g')^{-1}Fg = \mathcal{K} \iff F = g'\mathcal{K}g^{-1}$$

<sup>5</sup>一般的には  $d$ -定数であっても,  $\bar{d}C \neq 0$  である. 但し, 可積分系の数理解析であれば,  $\bar{d}C = 0$  として差し支えない.

<sup>6</sup>一般的には  $\bar{d}$ -定数であっても,  $d\mathcal{K} \neq 0$  である. 但し, 可積分系の数理解析であれば,  $d\mathcal{K} = 0$  として差し支えない.

をえる。

自明な解 (32) と 等式 (33) を BT 変換 (27) に代入すると,

$$d(g'Kg^{-1}) = (\bar{d}g)g^{-1} - (\bar{d}g')(g')^{-1} \quad (34)$$

をえる。これが  $g$  と  $g'$  (が満たす非線形方程式の間) を結ぶ BT 変換となっている。

Miura 変換 (16) に, 二つの  $F$  (30) と (33) を代入して, 一度積分 ( $d^{-1}$ ) すると, 二つの BT 変換 (31) と (34) を結ぶ変換:

$$\phi - \phi' - C = g'Kg^{-1} \quad (35)$$

をえる。

### 3.2 Darboux 変換

$\psi$  に対する線形系:

$$\bar{d}\psi = (d\phi)\psi + (d\psi)\Delta \quad (36)$$

を考える。この線形系 (36) の可積分条件より,

$$\{\bar{d}d\phi - (d\phi)^2\}\psi - (d\psi)\{\bar{d}\Delta - (d\Delta)\Delta\} = 0$$

をえる。ここで, 二番目の  $\{ \}$  内に注目し,

$$\bar{d}\Delta - (d\Delta)\Delta = 0 \quad (37)$$

とすれば, 線形系 (36) の可積分条件は, 非線形方程式 (13) と等価となる。いま,  $\Delta = \Delta'$  のときの線形系 (36) に対する正則 (invertible) な解を  $\psi = \theta$  をとする。このとき,  $\theta$  は線形系:

$$\bar{d}\theta = (d\phi)\theta + (d\theta)\Delta' \quad (38)$$

を満たし, 単純計算の結果, 等式:

$$\bar{d}(\theta\Delta'\theta^{-1}) = (d\phi')\theta\Delta'\theta^{-1} - \theta\Delta'\theta^{-1}(d\phi) \quad (39)$$

をえる。(e-)BT 変換 (31) と見比べると, 等式 (39) は  $\theta\Delta'\theta^{-1}$  が  $\phi' - \phi + d\text{-定数}$  の形であれば成り立つことが分かる。故に,

$$\phi' := \phi + \theta\Delta'\theta^{-1} - C', \quad dC' = 0 \quad (40)$$

とかける。この  $\phi$  と  $\theta$  により  $\phi'$  を与える関係式 (40) が, **Darboux 変換** である。そして, このときの  $\theta$  を **Darboux 変数** (または行列) とよぶ。

### 3.3 modified Miura 変換

線形系 (36) の波動関数  $\psi$  が正則だと仮定し, その正則な解を  $\psi = g$  だとすると, 線形系 (36) は

$$\{\bar{d}g - (dg)\Delta\}g^{-1} = d\phi \quad (41)$$

とかける. このとき, 可積分条件  $d^2\phi = 0$  は,

$$d[\{\bar{d}g - (dg)\Delta\}g^{-1}] = 0 \quad (42)$$

とかける.  $g$  に対する非線形方程式 (42) は, **modified Miura 変換**とでもよぶべき変換 (41) により,  $\phi$  に対する非線形方程式 (13) と双対な関係となっている.

このとき,

$$A(= d\phi) = \{\bar{d}g - (dg)\Delta\}g^{-1} \quad (43)$$

に対応するので,

$$\bar{d}A - A^2 = (dA)g\Delta g^{-1}, \quad (44)$$

$$\bar{d}g^{-1} + g^{-1}\phi' = d(\Delta g^{-1}), \quad (45)$$

$$\phi' := \phi + g\Delta g^{-1} + C'' \quad (46)$$

をえる. ここで,  $dC'' = 0$  である.

## 4 まとめ

本稿では, 双微分代数を用いた非線形可積分系の構成手法 および 数理解析手法について報告した. 紙数の関係上, 具体例を挙げることができなかった. 以下に, 双微分代数により導出される, 非線形偏微分方程式 の具体例を挙げておく:

(例) 行列型 **potential KP** 方程式

$(t, x, y)$  を三次元時空とし,  $f = f(t, x, y) \in \mathcal{A}$  を滑らかな関数とする. 演算子  $d, \bar{d}$  を, 具体的に次のように与える:

$$df = [\partial_x, f]\xi_1 + \frac{1}{2}[\partial_y + \partial_x^2, f]\xi_2, \quad (47)$$

$$\bar{d}f = \frac{1}{2}[\partial_y - \partial_x^2, f]\xi_1 + [\partial_t - \partial_x^3, f]\xi_2. \quad (48)$$

このとき, 行列場  $\phi = \phi(t, x, y)$  に対する非線形偏微分方程式 (13) は

$$\left\{ \phi_t - \frac{1}{4}\phi_{xxx} - \frac{3}{2}(\phi_x)^2 \right\}_x - \frac{3}{4}\phi_{yy} + \frac{3}{2}[\phi_x, \phi_y] = 0 \quad (49)$$

と等価となる。これが、行列型 **potential KP** 方程式<sup>7</sup> である。ここで、添え字は、その文字に関する偏微分（例えば、 $\phi_x := \partial_x \phi$ ）を表す。

$y$  依存性を無視する ( $\phi_y = 0$ ) ような条件を課すと、方程式 (49) は行列型 **potential KdV** 方程式<sup>8</sup>：

$$\phi_t - \frac{1}{4}\phi_{xxx} - \frac{3}{2}(\phi_x)^2 = 0 \quad (50)$$

に次元還元される。また、 $\phi$  をスカラー場だと思えば、方程式 (49) は

$$\left\{ \phi_t - \frac{1}{4}\phi_{xxx} - \frac{3}{2}(\phi_x)^2 \right\}_x - \frac{3}{4}\phi_{yy} = 0 \quad (51)$$

となる。これは（通常の）**potential KP** 方程式である。

多微分演算子  $d_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) を用いた、非線形可積分系の構成や数理解析に関する研究成果は、別の機会に報告したい。

## 謝 辞

本研究は、日本学術振興会 (JSPS)・ドイツ学術交流会 (DAAD)「特定国派遣事業」および 富山県立大学「特別研究費-奨励研究 (萌芽的研究)」からサポートを受けて行われていることを附記する。

## 参考文献

- [1] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen : J. Phys. A, **Vol. 33**, pp.957-pp.974 (2000).
- [2] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen : Rep. Math. Phys., **Vol. 46**, pp.203-pp.210 (2000).
- [3] J.R. Camacaro and J.F. Cariñena : “Applied Differential Geometry and Mechanics,” (eds. W. Sarlet and F. Cantrijn), Univ. of Gent, pp.1-pp.20 (2003).
- [4] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen : Discrete and Continuous Dynamical Systems Supplement, pp.208-pp.219 (2009).

<sup>7</sup>非可換 **potential KP** 方程式[6, 7, 8, 9] の一つ。

<sup>8</sup>非可換 **potential KdV** 方程式[6, 7] の一つ。

- [5] A. Dimakis, F. Müller-Hoissen and K. Toda : *Bi-differential calculus approach to Integrable systems*, プレプリント (2011).
- [6] K. Toda : J. High Energy Phys., **PRHEP-unesp2002/038** (2003).
- [7] M. Hamanaka and K. Toda : Phys. Lett. A, **Vol. 316**, pp.77-pp.83 (2003).
- [8] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen : J. Phys. A, **Vol. 37**, pp.10899-pp.10930 (2004).
- [9] A. Dimakis and F. Müller-Hoissen : J. Phys. A, **Vol. 38**, pp.5453-pp.5506 (2005).